Les positions de la firme en concurrence duopolistique : une analyse dans le cadre de la théorie des jeux

NDIAYE Babacar (CNRS-GREDEG)

Introduction

L'analyse des interactions stratégiques entre les firmes concurrentes a fait l'objet de nombreuses analyses récentes, notamment dans le cadre de la théorie des jeux. Avec la théorie des jeux canoniques puis dynamiques qui font l'objet de ce papier, chaque joueur adopte la stratégie lui permettant d'obtenir une rentabilité maximale. Toutefois, il existe aussi des situations dans lesquelles la stratégie adoptée ne permet pas d'optimiser la rentabilité. Les stratégies à rendement optimal et les stratégies à rendement non optimal caractérisent tout type de jeu dès lors que l'on est en situation de conflit. Au titre du modélisateur, nous tentons de construire la situation de conflit où il existe uniquement deux joueurs. Le jeu est constitué comme suit : les joueurs sont représentés par des firmes (first mover et follower), les actions correspondent aux stratégies et les rendements ou paiements sont représentés par le profit de chaque stratégie. De plus, la rentabilité de l'investissement dépend non seulement de la position de la firme, mais aussi du choix stratégique de la firme rivale. Ainsi, l'ensemble de ces interactions entre les firmes détermine une situation de conflit dès lors que les paiements relatifs à chaque stratégie sont différents d'une firme à l'autre. Notre analyse prend en compte trois postulats.

Le premier postulat est fondé sur l'idée selon laquelle les interactions stratégiques entre firmes concurrentes peuvent être analysées dans le cadre de la théorie des jeux dits *non coopératifs*. Un jeu est non coopératif si les joueurs n'ont pas la possibiliété de conclure des accords en eux[1]. En d'autres termes, chaque joueur, pris individuellement, agit au mieux de ses intérêts compte tenu des contraintes qu'il subit.

[1] Pour définir de manière simple un jeu non coopératif nous reprenons les propos de Friedman (1991) : "*A game is noncooperative if the players are not permitted to make binding agreements. A binding agreement is a contractual arrangement among some or all players that, once agreed upon, cannot be broken. It is perfectly and completely enforceable*". Friedman, (1991, p.24). Pour une revue complète de la littérature sur l'approche de la théorie des jeux non coopératifs, cf. VanDamme (1995). Par ailleurs, les analyses de Aumann (1981) et Schelling (1984) sont aussi essentielles dans le développement de la littérature sur la théorie des jeux non coopératifs. Toutefois, cette approche de la théorie des jeux coopératifs peut être remise en cause lorsque l'on se rapproche de la lecture proposée par Mailath (1998). Dans cette approche l'auteur résume la théorie des jeux non

Deuxièmement, la structure du jeu que nous tentons de modéliser est un duopole avec deux stratégies possibles pour chacune des firmes. Comme dans l'analyse des modèles traditionnels de jeu avec des mouvements séquentiels, il existe une information complète et le jeu est représenté aisément sous la forme extensive. Avec cette représentation, la firme qui adopte une stratégie en première position est appelée le first mover et la seconde est appelée le follower : c'est le principe de la distribution des rôles dans une industrie en duopole (Boyer et Moreaux, 1987). Le jeu considéré ici est composé de cinq étapes et les stratégies des firmes correspondent à celles d'une *« population bimorphique »*, c'est-à-dire une population qui dispose de deux stratégies possibles à chaque étape du jeu (Fernando, 1995)[2].

A la première étape du jeu, la firme first mover a deux actions possibles : investir ou ne pas investir dans la R&D, c'est à dire de garder son ancienne technologie. Dans le premier cas, l'investissement peut soit être un succès (innovation), soit être un échec (pas d'innovation). Ici, le résultat de l'investissement est déterminé par la « Nature » à la deuxième étape du jeu. Le paiement de la firme est donc déterminé par une espérance mathématique. A la troisième étape du jeu, la firme follower a deux actions : entrer ou ne pas entrer sur le marché. Si le follower entre sur le marché, il a encore deux actions possibles à la quatrième étape du jeu : investir dans la R&D ou imiter la technologie de la firme first mover. Lorsque le follower investit, la « Nature » détermine le résultat de l'investissement à la cinquième étape du jeu, alors qu'avec l'action « imiter », le follower dispose d'un gain certain. Si le follower n'entre pas sur le marché, l'issue du jeu est telle que le paiement du first mover correspond à une situation de monopole et celui du follower nul.

A partir de la règle du jeu précédente, l'analyse que nous développons est d'abord sans répétition. Ensuite, la répétition du jeu sera introduite et analysée dans le cadre de la théorie des jeux dynamiques.

Troisièmement, la connaissance, *a priori*, de la règle du jeu est fondamentale pour déterminer le choix rationnel de chaque firme en se basant sur la forme prise par la fonction de réaction. Pour cela, notre analyse tente d'établir une relation entre deux approches : l'une fondée à partir du profil de stratégies correspondant à l'équilibre de Nash du jeu et l'autre

---

coopératifs à (i) la maximisation de l'utilité, c'est-à-dire le comportement de rationalité des agents, et (ii) à la logique du raisonnement déductif, c'est-à-dire les agents font des anticipations correctes.

[2] En outre, il existe deux autres situations mises en évidence par Fernando (1995) et non prise en compte dans notre analyse dans lesquelles les firmes peuvent avoir plusieurs stratégies *(population polimorphique)* ou une seule stratégie possible *(population monomorphique)*.

fondée à partir de la position de la firme issue de la forme prise par la fonction de réaction. De ce point de vue, il existe un fondement théorique des modèles qui ont été élaborés par Cournot (1838), Bertrand (1883) et Stackelberg (1934). Le point commun entre ces modèles repose sur la notion de fonction de réaction. Cette notion se résume à l'analyse du comportement de la firme dans une industrie soumise à la concurrence. Dans ces analyses théoriques, le point essentiel est de comprendre comment une firme réagit par rapport à la décision de sa rivale. Cette fonction de réaction peut être positive ou négative selon la pression concurrentielle et/ou la stratégie adoptée par l'autre firme. Ainsi, pour matérialiser la fonction de réaction entre les firmes concurrentes, il existe des variables dont les plus connues sont la quantité (Cournot) et les prix (Bertrand). Avec la première variable, il existe en général un avantage du first mover sur le follower. En revanche, si la seconde variable (prix) est prise en compte, plusieurs modèles théoriques se penchent sur l'avantage de la firme follower du fait du processus de rattrapage (Ono, 1978, 1982 ; Boyer et Moreaux, 1986). L'existence d'une troisième variable a été mise en évidence par Beath et *alii*. (1989): l'investissement en R&D. Notre analyse s'inscrit dans ce dernier cas du fait que la R&D est considérée comme une variable stratégique. Dans cette perspective, les analyses théoriques (Glazer, 1985 ; Anderson et Engers, 1994 ; Lambertini, 2005) et empiriques (Shackleton et *alii*., 2004) montrent que la fonction de profit des firmes dans une industrie en duopole de Stackelberg dépend de la forme prise par la fonction de réaction de chaque firme. La situation la plus récurrente analysée par Gal-Or (1985) est celle avec laquelle s'il y a un ordre de mouvement séquentiel entre les firmes, le gain de la firme first mover est plus faible que celui du follower lorsque les fonctions de réaction des firmes sont croissantes. A l'inverse, lorsque les fonctions de réaction des firmes sont décroissantes le gain de la firme first mover est plus élevé que celui du follower. L'interprétation économique d'une fonction de réaction croissante signifie que l'incitation à l'innovation par la menace de la concurrence est supérieure à l'incitation par le profit. Dans ce cas, le follower adopte un comportement agressif et réagit de manière positive par rapport à l'action du first mover. En revanche, lorsque les fonctions de réaction des firmes sont décroissantes, la firme follower reste passive à l'action du first mover parce que l'incitation par le profit est supérieure à l'incitation par la menace de la concurrence. Dans cette perspective, Sherali (1984) et Dowrick (1986) montrent que la stratégie rationnelle de la firme est d'être en position de first mover (follower) si les fonctions de réaction des firmes sont décroissantes (croissantes).

En prenant en compte l'ordre de mouvement des firmes, nous tentons de déterminer les profils de stratégies correspondant à l'équilibre de Nash dans le cadre d'une analyse statique. Par la suite les jeux évolutionnaires seront introduits. Dans ce cas, nous tenterons de déterminer l'équilibre évolutionnairement stable, c'est-à-dire l'équilibre qui reste dominant au cours du temps.

La démarche suivante est adoptée pour la suite de ce papier. La section 1 présente une analyse statique du jeu en information parfaite. La section 2 introduit une extension à partir des jeux dynamiques. La section 3 conclut.

1. Analyse statique du jeu

Au titre du modélisateur, nous tentons de formaliser le jeu d'une industrie en duopole en information complète. La forme extensive du jeu, représentée par la Figure 1 est dite « arbre de Kuhn ».

La Figure 1 montre qu'il existe sept nœuds de décision dans le jeu : un nœud de décision pour le first mover à la première étape du jeu, six nœuds de décision pour le follower dont trois, notés A, B et C, à la troisième étape du jeu et les trois autres, notés D, E, F, à la quatrième étape du jeu.

Les trois nœuds de décision A, B et C dépendent de la stratégie du first mover à la première étape du jeu et du résultat de l'investissement. Ces nœuds de décision sont évalués de manière différente par le follower. Avec le premier sous-jeu enraciné par le nœud de décision A, le first mover investit en R&D et obtient une innovation. Ensuite, avec le sous-jeu enraciné par le nœud de décision B, le first mover investit en R&D, mais n'obtient pas d'innovation. Enfin, avec le sous-jeu enraciné par le nœud de décision C le first mover n'investit pas en R&D. Dans ce dernier cas, le FL garde son ancienne technologie.

Avec la forme extensive, représentée par la Figure 1, la méthode retenue pour déterminer les équilibres du jeu est la méthode de la récurrence à rebours. Cette méthode permet de déterminer, d'abord, les choix rationnels du follower (noté ci-dessous FL) et, ensuite, ceux du first mover (noté ci-dessous FM).

Les nœuds de décision représentés par un point (•) désignent les situations où les firmes ont la main. Les nœuds auxquels la nature détermine si les investissements aboutissent ou non à des innovations sont représentés par un carré (♦).

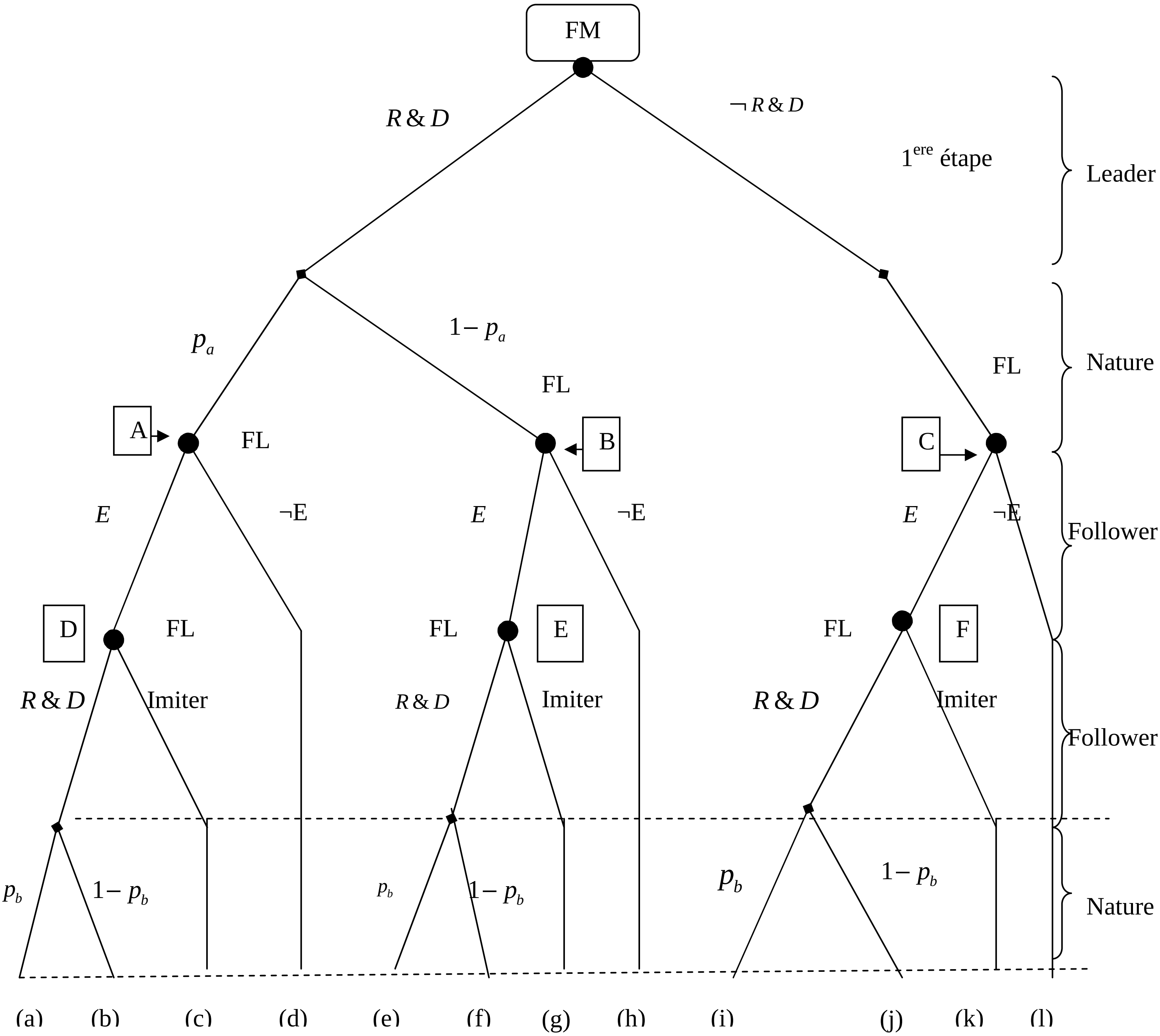

Fig. 1. Jeu entre le first mover (FM) et le follower (FL) en information parfaite

Etant donné que le jeu se déroule en cinq étapes, la règle du jeu est la suivante. A la première étape du jeu, la firme leader est la seule firme sur le marché. Elle fait un arbitrage entre investir en R&D ou ne pas investir en R&D. Dans le cas où elle investit en R&D, l'issue de l'investissement est représentée par une deuxième étape au cours de laquelle la « Nature » détermine si l'investissement en R&D est un succès avec une probabilité p_a ou un échec avec une probabilité $(1-p_a)$. En revanche, si le FM n'investit pas en R&D, il garde son ancienne technologie. A la troisième étape du jeu, le FL dispose, d'abord, de deux stratégies : entrer sur le marché (E) ou ne pas entrer sur le marché (¬E). Dans la mesure où le FL entre sur le marché à la troisième étape du jeu, elle sera en concurrence avec le FM quelle que soit la stratégie de celle-ci lors de la première étape du jeu. Dans cette situation, le FL peut, à la quatrième étape du jeu, investir un montant fixe en R&D ou imiter directement la technologie obtenue par le FM. S'il y a investissement en R&D pour le FL, la « Nature » détermine aussi le résultat de l'investissement avec une probabilité de succès notée p_b et une probabilité d'échec notée $(1-p_b)$. A l'inverse si le FL décide de ne pas entrer sur le marché, il n'existe pas d'interactions stratégiques dans le jeu et le FM reste en position de monopole quelle que soit l'issue de son investissement. De ce point de vue, il existe trois situations de monopole dans lesquelles le FL n'entre pas sur le marché : lorsque le FM investit et obtient une innovation, lorsque le FM investit mais n'obtient pas d'innovation et lorsque le FM n'investit pas en R&D. Dans chacune de ces situations, les profits obtenus par le FM ne sont pas identiques.

Avec ces différentes situations, le FL dispose de plus des stratégies que le FM. Une stratégie est ici définie comme une combinaison de choix (actions) que la firme fait tout au long du déroulement du jeu, à chaque étape du jeu, c'est-à-dire à chaque ensemble d’information.

A partir de la règle du jeu définie précédemment, on cherche à déterminer les profils de stratégie rationnels de chaque firme. Quelle sera la stratégie de chaque firme compte tenu des anticipations? Les équilibres du jeu vont-ils dépendre de l’information dont on dispose dans le jeu? Telles sont les questions fondamentales que nous posons et essayons d’apporter des réponses tout au long de ce papier.

1.1. Choix des variables du modèle

Afin de faciliter le choix des variables du modèle, nous faisons la distinction entre la position du FM et la position du FL en termes de profit obtenu. Le choix des variables dépend uniquement de l’issue du jeu, c'est-à-dire le profit de chaque firme dépend de la stratégie adoptée et du résultat de l’investissement en R&D. Les variables sont choisies de la manière suivante :

$\pi_{FM}^{1^+1^+}$ et $\pi_{FL}^{1^+1^+}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsqu’ils obtiennent chacun une innovation.

$\pi_{FM}^{1^+1^-}$ et $\pi_{FL}^{1^+1^-}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsqu’ils ont tous les deux investi en R&D, mais seule le FM obtient une innovation.

$\pi_{FM}^{1^+2}$ et $\pi_{FL}^{1^+2}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsque le FM obtient une innovation qui sera imitée par le FL.

$\pi_{FM}^{1^{+m}0}$ est le profit du FM lorsqu’il innove et se situe en position de monopole parce que le FL n’entre pas sur le marché.

$\pi_{FM}^{1^-1^+}$ et $\pi_{FL}^{1^-1^+}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsque les deux firmes investissent mais seule le FL obtient une innovation mais n’obtiennent pas d’innovation.

$\pi_{FM}^{1^-2}$ et $\pi_{FL}^{1^-2}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsque le FM n’a pas obtenu d’innovation et que le FL entre sur le marché mais n’investit pas (ou imite la technologie de départ du FM).

$\pi_{FM}^{1^{-m}0}$ est le profit du FM lorsqu’il investit sans succès et se situe en position de monopole parce que le FL n’entre pas sur le marché.

$\pi_{FM}^{21^+}$ et $\pi_{FL}^{21^+}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsque le FM n'investit pas en R&D et que le FL obtient une innovation après investissement.

$\pi_{FM}^{21^-}$ et $\pi_{FL}^{21^-}$ sont respectivement les profits du FM et du FL lorsque le FM n'investit pas en R&D et que le FL n'obtient pas d'innovation après investissement.

π_{FM}^{22} et π_{FL}^{22} sont respectivement les profits du FM et du FL lorsqu'ils n'investissent pas en R&D mais le FL entre sur le marché et imite la technologie de départ du FM.

$\pi_{FM}^{2^m 0}$ est le profit du FM lorsqu'il n'investit pas en R&D et se situe en position de monopole parce que le FL n'entre pas sur le marché.

A partir de ces variables, il existe, pour chaque nœud terminal, un couple de gains correspondant à la stratégie des deux firmes. A partir des différentes combinaisons de stratégies, il existe douze couples de gains différents les uns des autres. Ces couples de gains sont représentés successivement par les lettres : *(a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k)* et *(l)*. Chacune de ces lettres permet de former un couple de gains des deux firmes. Les choix de combinaison sont élaborés de la manière suivante :

$$(a)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^+1^+}\\ \pi_{FL}^{1^+1^+}\end{pmatrix},(b)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^+1^-}\\ \pi_{FL}^{1^+1^-}\end{pmatrix},(c)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^+2}\\ \pi_{FL}^{1^+2}\end{pmatrix},(d)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^{+m}0}\\ 0\end{pmatrix},(e)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^-1^+}\\ \pi_{FL}^{1^-1^+}\end{pmatrix},(f)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^-1^-}\\ \pi_{FL}^{1^-1^-}\end{pmatrix},$$

$$(g)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^-2}\\ \pi_{FL}^{1^-2}\end{pmatrix},(h)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{1^{-m}0}\\ 0\end{pmatrix},(i)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{21^+}\\ \pi_{FL}^{21^+}\end{pmatrix},(j)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{21^-}\\ \pi_{FL}^{21^-}\end{pmatrix},(k)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{22}\\ \pi_{FL}^{22}\end{pmatrix},(l)=\begin{pmatrix}\pi_{FM}^{2^m0}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Chaque couple de gains est composé par la combinaison du profit obtenu par le FM et celui obtenu par le FM à un nœud terminal.

Pour comparer les profits des firmes, il faut d'abord s'intéresser à l'action du FL, puis à celui du FM.

Dans le but de simplifier le raisonnement, il est indispensable de poser les hypothèses suivantes pour faciliter la comparaison entre les espérances de gains lorsqu'il y a investissement et les gains certains lorsqu'il y a imitation.

Hypothèse 1 : À la fin de l'étape 2 et de l'étape 5 du jeu, si le FM et le FL obtiennent chacune une innovation, leurs profits respectifs sont supérieurs aux profits correspondant à la situation d'absence d'innovation. Cette hypothèse est posée de manière intuitive parce que l'innovation augmente le profit espéré de la firme.

Hypothèse 2 : Dans toutes les situations où le FM n'a pas obtenu d'innovation ou n'investit pas dans la R&D, l'espérance de gain obtenue par le FL avec un investissement en R&D est supérieure à son gain certain obtenu par imitation de l'ancienne technologie du FM. De plus, si le FM obtient une innovation, il est optimal pour le FL d'imiter la technologie du FM du fait de l'importance des coûts de la R&D.

Ces hypothèses permettront d'analyser successivement les possibilités de choix rationnels du FL et du FM.

1.2. Possibilités de choix rationnels du FL

En situation d'information parfaite, le FL observe le résultat de l'action du FM. De ce point de vue, le FL choisit parmi les profils de stratégies qui lui permettent d'obtenir un profit élevé. L'application de la méthode de la récurrence à rebours permet de comparer les profits des firmes. Avec cette méthode, le FL obtient un profit plus élevé dans la situation où l'investissement en R&D aboutit à une innovation (hypothèse 1). Cependant, le choix de l'action de la firme FL dépend directement de l'action du FM et du résultat de son investissement.

Le raisonnement de la récurrence à rebours s'applique en trois phases. A la première phase, on se demande en premier lieu ce que le FL, qui joue en dernier, choisit aux nœuds de décision D, E et F. Durant cette phase on compare l'espérance de gain en présence d'investissement et le gain certain en situation d'imitation à chaque nœud de décision. Après avoir éliminé les profils de stratégies les moins efficientes, on détermine à la deuxième phase du raisonnement les stratégies du FL les moins rationnelles aux nœuds de décision A, B et C. Durant cette phase, la question est de savoir s'il est profitable ou non pour le FL d'entrer sur le marché. Les deux premières phases permettent de faire la distinction entre le jeu d'entrée et le jeu d'investissement. A la troisième phase du raisonnement, on tentera de déterminer l'action optimale du FM entre « investir » et « ne pas investir ».

Pour comparer les gains obtenus à la première phase de l'application de la méthode de la récurrence à rebours, le FL fait un arbitrage entre les sous-jeux enracinés par les nœuds de décision D, E et F.

1er cas : Nœud de décision D

Au nœud de décision D, le FL compare l'espérance de gain obtenu s'il y a investissement en R&D, c'est-à-dire $p_b\pi_{FL}^{1^+1^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{1^+1^-}$ et le gain certain d'imitation, c'est-à-dire $\pi_{FL}^{1^+2}$.

- Si $\pi_{FL}^{1^+2} > p_b\pi_{FL}^{1^+1^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{1^+1^-}$ le FL choisit d'imiter la technologie du FM.
- Si $\pi_{FL}^{1^+2} < p_b\pi_{FL}^{1^+1^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{1^+1^-}$ le FL choisit d'investir en R&D parce que l'espérance de gain obtenue avec un investissement est plus importante que le gain certain obtenu avec l'imitation.

En prenant en compte l'hypothèse 2, on constate que le gain certain obtenu par le FL lorsqu'il y a imitation est plus important que l'espérance de gain issue de l'investissement. Dans ce cas, la firme FL choisit l'action « imiter ». Par conséquent, les nœuds terminaux (a) et (b) sont éliminés.

2eme cas : Nœud de décision E

Au nœud de décision E, le FL compare l'espérance de gain obtenu s'il y a investissement en R&D, c'est-à-dire $p_b\pi_{FM}^{1^-1^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{1^-1^-}$ et le gain certain d'imitation, c'est-à-dire $\pi_{FL}^{1^-2}$.

- Si $\pi_{FL}^{1^-2} > p_b\pi_{FM}^{1^-1^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{1^-1^-}$ le FL choisit d'imiter la technologie ancienne du FM.
- Si $\pi_{FL}^{1^-2} < p_b\pi_{FM}^{1^-1^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{1^-1^-}$ le FL choisit d'investir en R&D parce que l'espérance de gain obtenue avec un investissement est plus importante que le gain certain obtenu avec l'imitation.

En prenant en compte l'hypothèse 2, il est optimal pour le FL d'investir en R&D. Dans ce cas l'espérance de gain du FL lorsqu'il y a investissement est supérieure au gain certain d'imitation. Par conséquent le nœud terminal (g) est éliminé.

3^eme^ cas : Nœud de décision F

Au nœud de décision F, le FL compare l'espérance de gain obtenu s'il y a un investissement en R&D, c'est-à-dire $p_b\pi_{FL}^{21^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{21^-}$ et le gain certain d'imitation, c'est-à-dire π_{FL}^{22}.

- Si $\pi_{FL}^{22} > p_b\pi_{FL}^{21^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{21^-}$ le FL choisit d'imiter la technologie ancienne du FM.
- Si $\pi_{FL}^{22} < p_b\pi_{FL}^{21^+} + (1 - p_b)\pi_{FL}^{21^-}$ le FL choisit d'investir en R&D parce que l'espérance de gain obtenue avec un investissement est plus importante que le gain certain obtenu avec l'imitation.

En prenant en compte l'hypothèse 2, il est optimal pour le FL d'investir du fait que le FM n'a pas investi au cours de la première étape du jeu. Dans cette situation, le nœud terminal (k) est éliminé.

Après la première phase de la récurrence à rebours au cours de laquelle les nœuds terminaux (a), (b), (g) et (k) sont éliminés, la seconde phase peut maintenant être analysée. Durant cette phase, les nœuds de décision pris en considération sont A, B et C. En effet, il est évident que pour mettre en évidence les éléments stratégiques, la firme FL doit être présente sur le marché. De ce fait, l'action (E) est préférée à l'action (¬E). Par conséquent, les nœuds terminaux (d), (h) et (l) seront éliminés du jeu.

1.3. Possibilités de choix rationnels du FM

Les possibilités de choix du FM dépendent de la stratégie du FL à la quatrième étape du jeu. Le FM dispose uniquement de deux actions : « investir en R&D » (R&D) et « ne pas investir en R&D » (¬R&D). Si le FL choisit d'entrer sur le marché (E) et d'investir en R&D, l'incertitude sur le résultat de l'investissement en R&D influence à la fois les gains du FL et du FM. Dans cette situation, on cherche à déterminer le montant du gain espéré pour le FM s'il choisit l'action R&D. Ce gain dépend de l'espérance de gain issu de l'obtention d'une innovation pour le FM et de l'espérance de gains issus de la situation où il n'y a pas d'innovation. Il existe donc une double espérance calculé de ma manière suivante.

$$p_a \pi_{FM}^{1^+2} + (1-p_a)\left[p_b \pi_{FM}^{1^-1^+} + (1-p_b)\pi_{FM}^{1^-1^-} \right] \quad (1).$$

L'espérance de gain, représentée par l'équation (1), correspond à la situation où le FM choisit l'action R&D. En revanche, si le FM choisit de ne pas investir en R&D, quel sera son gain espéré ? Pour répondre à cette question, nous prenons en compte uniquement le sous-jeu enraciné par le nœud de décision C. Comme la probabilité d'obtention d'une innovation pour le FL a un impact sur le gain du FM, alors le FM compare son gain espéré lorsque le FL investit, c'est-à-dire $p_b \pi_{FM}^{21^+} + (1-p_b)\pi_{FM}^{21^-}$, avec son gain certain lorsque le FL imite son ancienne technologie, c'est-à-dire π_{FM}^{22}.

Avec l'hypothèse 2, nous avons $p_b \pi_{FM}^{21^+} + (1-p_b)\pi_{FM}^{21^-} > \pi_{FM}^{22}$. En d'autres termes l'espérance de gain obtenue par le FL est supérieure à son gain certain si elle décide d'imiter l'ancienne technologie du FM. Ainsi, en prenant en compte la stratégie (E) et R&D) du FL, le gain espéré du FM issu du choix de l'action (*R&D*) est donné par :

$$p_b \pi_{FM}^{21^+} + (1-p_b)\pi_{FM}^{21^-} \quad (2)$$

Au final, les profils de stratégie correspondant à l'équilibre de Nash dépendent de la comparaison des espérances de gain représentées par les équations (1) et (2) du FM. Le choix de l'action du FM dépend donc de deux situations.

1ère situation : $(1) > (2)$

Dans cette situation, le FM choisit l'action (R&D). Comme le résultat de l'investissement est incertain, le profil de stratégie correspondant à l'équilibre de Nash est déterminé à partir des sous-jeux enracinés par les nœuds de décision A et B. De ce fait, l'équilibre de Nash parfait de chaque sous-jeu est obtenu en fonction du résultat de l'investissement du FM. Dans cette perspective, le cas avec lequel l'investissement est un succès est distingué du cas avec lequel l'investissement n'aboutit pas à une innovation. Si le FM investit et obtient une innovation, le profil de stratégie correspondant à l'équilibre de Nash est composé des actions (R&D) pour le FM et des actions (E, Imiter) pour le FL. Dans ce cas, l'issue du jeu est le nœud terminal (c). En revanche, si le FM investit et n'obtient pas d'innovation, l'équilibre de Nash du jeu, se situe au sous-jeu enraciné par le nœud de décision B. Dans ce cas, le FL entre sur le marché et investit en R&D. Par conséquent, le profil de stratégies correspondant à l'équilibre de Nash est composé des actions (R&D) pour le FM et (E, R&D) pour le FL. Selon le résultat de l'investissement du FL, l'issue du jeu se situe soit au nœud terminal (e), soit au nœud terminal (f).

2ème situation : $(1) < (2)$

Dans cette situation, le FM choisit l'action (¬R&D), c'est-à-dire l'ancienne technologie continue à être utilisée. Ici, le profil de stratégies correspondant à l'équilibre de Nash se situe au nœud de décision C. Avec la prise en compte de l'hypothèse 5, le FM anticipe l'action du FL consistant investir dès lors qu'il n'y a pas d'investissement à la première étape du jeu. Dans ce cas, le profil de stratégies obtenu à l'équilibre de Nash parfait du sous-jeu est composé des actions (¬R&D) pour le FM et (E, R&D) pour le FL. Comme il existe aussi dans cette situation une incertitude sur le résultat de l'investissement, l'issue du jeu est composée soit du nœud terminal (i), soit du nœud terminal (j).

Après élimination des choix les moins rationnels, le raisonnement précédent nous amène à maintenir les nœuds terminaux sont (c), (e), (f), (i) et (j). Ces nœuds terminaux permettent de déterminer directement le profil de stratégie des différents équilibres parfaits des sous-jeux enracinés aux les nœuds de décision A, B et C.

1.4. Jeu itéré et application à une industrie en duopole

Dans l'analyse précédente, les différentes stratégies possibles et les caractéristiques de l'équilibre de Nash sont analysées pour une situation donnée du jeu. A partir de cette analyse, il est possible d'en déduire un prolongement avec lequel les firmes savent, *a priori*, que le jeu se déroule sur plusieurs périodes : on passe du jeu à un seul coup à un jeu à plusieurs coups. Il existe des situations dans lesquelles le jeu se termine par un dernier coup et, d'autres situations où le jeu n'a pas de dernier coup[3]. Dans le premier cas de figure, on parle de jeu itéré à horizon fini, et dans le second cas de figure de jeu itéré à horizon infini.

Avec le cadre d'analyse développé précédemment, le premier coup est aussi le dernier coup du jeu. Etant donné qu'à chaque coup du jeu, chaque firme connait les stratégies de l'autre firme adverse à l'étape précédente, alors les stratégies présentes dépendent, en partie, des stratégies précédentes du jeu. Dans ce contexte, il semble logique d'intégrer la répétition dans notre modèle de jeu dans le but de mieux comprendre les interactions stratégiques. A ce stade, l'intuition économique que l'on peut retenir est que si le jeu est suffisamment répété et les joueurs assez patients alors le jeu non coopératif peut aboutir à un jeu coopératif. Même si on considère par hypothèse que notre analyse se limite aux jeux non coopératifs, il est néanmoins utile de rappeler que la prise en compte d'un jeu non coopératif répété infiniment peut aboutir, grâce à la mise en application du « folk » théorème, à un équilibre coopératif. L'exemple traditionnel du dilemme du prisonnier permet de justifier cette intuition car si le jeu est suffisamment répété chaque il sera plus rationnel pour chaque joueur de coopérer en jouant la stratégie « ne pas avouer » (Béal, 2005). Ce nouveau cadre d'analyse a pour objectif de faire apparaître des données importantes telles que la dynamique des comportements et les réactions des firmes tout au long du déroulement du jeu.

En reprenant l'exemple classique du dilemme du prisonnier, les analyses théoriques montrent que, aussi longtemps que le jeu est répété en nombre fini de fois (trois fois ou mille fois), il n'existe qu'un seul équilibre de Nash avec lequel les deux joueurs adoptent la stratégie de la défiance (Guerrien, 1999). Cela découle de la mise en application du principe de la récurrence à rebours. D'après ce principe, chaque joueur a intérêt à « avouer » au dernier coup du jeu parce qu'il n'existe aucune menace crédible puisque le jeu s'arrête. En conséquence, les joueurs raisonnent de la même façon au dernier coup, à l'avant dernier coup et ainsi de suite. Avec cette expérience, les théoriciens des jeux considèrent que tout jeu répété un nombre fini de fois peut être considéré comme un jeu à un seul coup parce que l'équilibre de Nash de ce dernier, s'il existe, définit aussi les équilibres du premier.

[3] La notion de coup en théorie des jeux fait référence à un processus complet au cours duquel tous les joueurs adoptent une stratégie. Ainsi, on peut observer les paiements de chaque joueur. Du point de vue de la nomenclature, il est possible de considérer que le jeu peut être composé de différentes étapes qui constituent au total le coup du jeu. Cette distinction est plus perceptible dans les jeux séquentiels.

Contrairement à la situation où le dernier coup du jeu est connu, il existe aussi des situations dans lesquelles le dernier coup du jeu n'est pas connu : on parle alors de jeu itéré à horizon infini. Un jeu est à horizon infini si les joueurs considèrent qu'il n'existe pas de dernier coup ou que celui-ci n'est pas connu et qu'aucun d'entre eux ne pense jouer le dernier coup pour une quelconque situation prise de manière arbitraire. Ainsi, à chaque phase du jeu, la probabilité correspondant à ce que cette même phase soit rejouée doit être différente de zéro. Les jeux itérés à horizon infini sont introduite parce que dans la vie économique, les relations entre les agents sont durables, d'où l'intérêt de représenter les situations avec lesquelles les joueurs sont confrontés à la même situation stratégique plusieurs fois de suite. Par conséquent, la connaissance de l'horizon a un impact significatif sur l'équilibre de Nash du jeu.

En considérant la concurrence comme un processus intégrant plusieurs phases dont chacune est transposable à une situation quelconque donnée d'un jeu à un coup, alors l'ensemble des coups du jeu constitue le processus de la concurrence. Il est donc possible de considérer que le processus concurrentiel en situation de duopole (Airbus/Boeing, Coca Cola/Pepsi, Fujitsu/Micron, Kodak/Fuji…) est potentiellement plus proche d'un jeu à horizon infini qu'un jeu à horizon fini. A ce stade, la question qui se pose est de savoir est-ce que les firmes ont intérêt à coordonner leurs stratégies, c'est-à-dire coopérer ou doivent-elles investir indépendamment pour se concurrencer ? Si les différentes étapes d'innovation et de concurrence sont prises en compte, une implication importante de cette question dans les industries de réseau aboutit au choix entre la bataille autour d'un standard ou l'accord sur une technologie commune (Foray, 2002). En prenant par exemple l'industrie de la photographie, on constate que la concurrence entre Kodak et Fuji a débouché aujourd'hui sur l'adoption d'un format de pellicule commun : l'Advanced Photo System. Cette orientation permet de justifier la position de notre analyse vis-à-vis du processus perpétuel d'innovation concurrentielle. Afin d'adapter la théorie à la réalité économique, notre analyse prend comme référence les résultats du modèle de Wen (2002). Ce modèle distingue les jeux séquentiels à horizon fini et les séquentiels à horizon infini. Dans ce premier cas le gain du FL est plus important que celui du FM. Ce résultat est obtenu grâce à la méthode du *minimax*. En revanche dans le second cas, aucune conclusion ne peut être apportée sur l'ordre préférentiel de déplacement des firmes.

2. Analyse dynamique du jeu

Ici, l'hypothèse de forte rationalité est relâchée : la rationalité des firmes devient limitée. Le recours à la théorie des jeux évolutionnaires[4] permet de considérer désormais l'hypothèse d'agents dotés d'une rationalité limitée, la prise en compte des stratégies d'une population, la dynamique des équilibres permettant de prendre en compte les comportements irrationnels et l'identification d'un mécanisme de sélection pertinent déterminant l'équilibre qui sera choisi. Sur ce dernier point, la question qui se pose est de savoir comment les firmes rationnelles doivent raisonner afin de se retrouver dans une position optimale sans pour autant coordonner leurs actions.

Le modélisateur se contente en général de calculer les équilibres sans vraiment se demander sous quelles conditions les firmes sont en mesure de trouver la solution optimale par l'intermédiaire d'une stratégie rationnelle. Derrière cette première question, il en découle une seconde : la justification des équilibres. En d'autres termes, l'équilibre autour duquel se retrouvent les joueurs sera-t-elle l'équilibre optimal ? Il s'agit donc de justifier l'optimalité de l'équilibre obtenu vis-à-vis des autres équilibres. Face à cette double interrogation, la solution consiste à justifier les stratégies de chaque firme vis-à-vis de la théorie de la maximisation de l'utilité. En effet, dans la mesure où l'utilité d'un joueur dépend du choix d'un ou de plusieurs autres joueurs, il doit, avant de prendre sa décision, anticiper les choix des autres joueurs. Ainsi, si chaque joueur procède à ce raisonnement, se déroule alors un processus d'anticipation croisée nécessitant de la part de chaque joueur des capacités cognitives importantes. En d'autres termes, si tous les joueurs sont rationnels, chacun d'entre eux va mener le même raisonnement ; de sorte qu'un joueur, avant de prendre sa décision, doit non seulement anticiper le choix de ses opposants, mais aussi anticiper l'anticipation que ses opposants tiennent à l'égard de sa propre anticipation, et ainsi de suite. Face à ces problèmes complexes, l'impératif théorique consiste à recourir à la théorie des jeux évolutionnaires en décrivant le déroulement ou l'histoire du processus, soit par la résolution formelle d'un

[4] La théorie des jeux évolutionnaires connaît une autre acception dans la littérature : la théorie des jeux évolutionnistes. Elle est considérée comme un outil d'analyse permettant de comprendre le déroulement d'un processus. De ce point de vue, Dosi et Winter (2003) considèrent que l'impératif théorique de la théorie évolutionniste est le suivant : décrire le déroulement ou l'histoire du processus, soit par la résolution formelle d'un système dynamique, soit par l'utilisation d'une reconstruction historique et qualitative de ce dernier (si possible *les deux*), tout en restant extrêmement prudent vis-à-vis de l'interprétation des observations faites en des termes de rationalité d'équilibres *ex post*.

système dynamique, soit par la mise en place d'une reconstruction historique et qualitative du modèle étudié.

Avec les hypothèses de rationalité limitée et de la répétition du jeu, l'objectif premier de la théorie des jeux évolutionnaires est d'analyser les propriétés des équilibres vis-à-vis de la dynamique des modèles. Ainsi, la notion de stratégie évolutionnairement stable (SES), mise en évidence pour la première fois en biologie par Maynard Smith (1982) reste la référence centrale de la théorie des jeux évolutionnaires. Une SES est définie comme une stratégie qui : *i)* évolue dans le temps, *ii)* est stable envers elle-même, et *iii)* supérieure à toutes les autres stratégies du jeu.

A partir de cette définition, la recherche d'une SES ou d'un équilibre standard socialement désiré devient un objectif fondamental pour le modélisateur. L'outil d'analyse permettant de mettre en évidence la SES est la dynamique du réplicateur.

2.1. Stratégie évolutionnairement stable : Jeu du faucon colombe

Maynard Smith (1982) débute son ouvrage avec le jeu du faucon-colombe, devenu depuis un exemple standard sur les discussions autour de la stabilité évolutionnaire en biologie. L'illustration que nous empruntons à Maynard Smith apparaît ici uniquement pour la définition de la SES. Par la suite, d'autres auteurs seront pris comme référence dans la suite de notre analyse (Weibull, 1995 ; Friedman, 1996). Après l'illustration proposée par Maynard Smith, McNamara et *alli*. (1991) ont analysé le jeu du faucon-colombe dans un angle plus complet au sujet des caractéristiques d'une SES.

Dans ce jeu, il existe une population composée d'individus ayant la possibilité d'adopter deux types de stratégies : une stratégie de type faucon (Hawk) et une stratégie de type colombe (Dove). Ainsi, la règle du jeu est définie à partir du comportement adopté par chaque individu appartenant à la population. En effet, le comportement des deux animaux consiste à se disputer un territoire dont la valeur en termes d'adaptabilité est notée par V. Cela signifie, selon la logique de Darwin, que l'individu qui gagne et obtient le territoire aura une augmentation d'individus appartenant à son groupe de la valeur V. En d'autres termes, c'est au sein d'une même population qu'il existe des individus ayant la possibilité d'adopter un comportement de type faucon ou de type colombe. Par conséquent, le choix d'une stratégie (comportement) détermine la fonction de paiement de l'individu en question. Par exemple, lorsque les animaux donnent 6 nouveaux nés s'ils sont dans le territoire approprié et 4 nouveaux nés s'ils ne sont pas dans le territoire approprié, alors V est égal à $6-4=2$. Donc, même si les individus ne sont pas dans le territoire approprié, il y aura toujours une augmentation d'individus. Etant donné que les animaux peuvent changer de comportements, on considère qu'ils disposent uniquement de deux stratégies, notées H (Hawk) et D (Dove). On suppose qu'aucun individu ne change son comportement au cours du jeu.

La règle du jeu est la suivante : si les deux individus se comportent comme des colombes, ils se partagent de manière équitable le territoire ; si l'un se comporte comme un colombe (D) et l'autre comme un faucon (H), le faucon obtient le territoire et le colombe se retire sans avoir subi aucune blessure ; si les deux jouent la stratégie H, c'est-à-dire se comportent comme des faucons, il y aura , d'abord, un combat qui implique un coût élevé et par la suite des risques de blessures noté C et, ensuite, durant le combat la probabilité qu'un individu blesse son adversaire est la même $(p=1/2)$. A partir de la règle du jeu, la matrice des paiements permet de résumer la structure du jeu.

Le Tableau 1 suivant permet de représenter la matrice des paiements :

Tableau 1. Forme stratégique du jeu faucon-colombe

	H	D
H	1/2 (V-C)	V
D	0	V/2

Comme le jeu s'effectue par paire d'individus ayant chacun deux comportements différents, le Tableau 1 peut être interprété d'une manière simple en prenant uniquement, soit la stratégie de l'individu situé sur la ligne de la matrice, soit la stratégie de l'individu situé sur la colonne de la matrice. Sachant que le raisonnement reste le même pour chaque individu situé sur la ligne ou sur la colonne de la matrice des paiements, nous choisissons arbitrairement les stratégies de l'individu se situant sur la ligne de la matrice des paiements.

Si les deux adversaires choisissent de jouer H, chacun des deux individus peut blesser son adversaire avec un coût C. Ensuite, il y a un partage du territoire. Chacun des deux individus a un gain égal à 1/2(V-C).

Si un des deux individus joue la stratégie H et son adversaire la stratégie D, celui qui a joué H obtiendra le territoire avec un gain de V et l'autre se retire.

Si un des deux individus joue la stratégie D et l'autre la stratégie H, celui qui a joué la stratégie D obtient zéro et son adversaire obtient le territoire. Dans la situation décrite par le Tableau 1, c'est l'individu se situant sur la ligne de la matrice qui se retire du territoire et son adversaire obtient un gain V. La valeur de zéro prise par D s'explique par le fait que les colombes ne sont pas sur le territoire approprié mais la valeur cette espèce évolue. En reprenant l'exemple numérique précédent, les colombes ont une évolution de 2 nouveaux nés même si le gain représenté sur la matrice est zéro.

Si chacun des individus joue D, le territoire est partagé de manière équitable et il n'y aura aucun risque de blessure. Dans ce cas, chaque individu aura un gain de V/2.

Le même type de raisonnement est applicable pour l'individu se trouvant sur la colonne de la matrice des gains représentée par le Tableau 1.

A partir de ce raisonnement, comment déterminer la SES ? Pour répondre à cette question, choisissons, par exemple, deux stratégies : une stratégie stable et une stratégie mutante. Ainsi, on peut remplacer la stratégie stable (S) et la stratégie mutante (M) par la stratégie H et la stratégie D respectivement. Ce choix permettra de trouver la SES dans le jeu du faucon-colombe représenté sous la forme stratégique. Etant donné que la stratégie du faucon (H) est la seule stratégie qui fait émerger une perte de coût due au combat (C), alors il est évident que la stratégie de la colombe n'est pas une SES. Par conséquent, on peut écrire la relation suivante : $E(D,D) < E(H,D)$. D'après cette inégalité, une population dont les individus adoptent le comportement de type faucon a plus de chance d'envahir une population dont les individus ont le comportement de type colombe. Dans ce type de jeu, la seule SES que nous pouvons considérer est la stratégie H. En effet, le paiement d'un individu adoptant la stratégie H contre un individu de la population adverse adoptant la même stratégie est noté $E(H,H) = 1/2(V-C)$. Par conséquent H est une SES si et seulement si $V > C$, c'est-à-dire le gain en reproduction pour l'individu qui obtient le territoire est supérieur au coût du combat. A l'inverse si $V < C$, le jeu n'admet pas de SES. Donc la stratégie H est une SES, si en remplaçant M par H, certaines conditions sont vérifiées. La vérification de ces conditions sera établie à partir de l'analyse comparative entre les modèles proposés dans la sous-section suivante.

Cet exemple illustre bien une SES représentée par un équilibre évolutionnaire en coin, c'est-à-dire un équilibre évolutionnaire obtenu à partir des stratégies pures. Toutefois, il est aussi possible de mettre en évidence des situations dans lesquelles l'équilibre évolutionnaire obtenu est un équilibre intérieur appelé aussi équilibre évolutionnaire de stratégies mixtes. Dans ce cas, il est nécessaire de définir au préalable l'équilibre de Nash et établir une relation entre celui-ci et l'équilibre évolutionnaire. Sur ce point, on peut admettre la situation avec laquelle $V < C$, c'est-à-dire le coût du combat est supérieur à la récompense de la victoire. Dans une telle situation, Maynard Smith (1982) propose de faire appel aux stratégies mixtes pour obtenir une SES. Cette proposition concerne en général l'analyse de l'évolution d'une population biologique et peut, dans certaines circonstances, ne pas être applicable à certains domaines de la théorie économique (Friedman et Rosenthal, 1986).

2.2. Dynamique du réplicateur

Dans cette sous-section, nous considérons le modèle évolutionniste de compétition entre deux technologies de réseau pour illustrer la dynamique du réplicateur. En effet, c'est à l'aide des modèles darwiniens que la dynamique du réplicateur est, pour la première fois, mise en évidence. De ce fait, la dynamique d'évolution est une dynamique déterministe du processus de sélection naturelle que l'on appelle la dynamique du réplicateur. Dans la littérature, il existe plusieurs manières d'obtenir la dynamique du réplicateur[5]. Pour des raisons de simplicité, nous adoptons la méthode utilisée par Binmore (1992).

Nous considérons qu'il existe un continuum d'utilisateurs potentiels qui ont le choix entre deux technologies incompatibles. Ces technologies sont notées 1 et 2. Etant donné qu'il s'agit de technologies de réseau, un utilisateur de type i $(i = 1, 2)$, c'est-à-dire utilisant la technologie i, bénéficie d'une externalité positive lorsqu'il interagit avec un autre utilisateur du même type que lui. En revanche, lorsqu'il entre en relation avec un autre utilisateur de type j $(j \neq i)$ il n'y a aucune externalité de réseau. On considère que les interactions entre les deux utilisateurs sont suffisamment fréquentes pour stimuler la concurrence entre les deux technologies concurrentes. Le coût d'adoption de la technologie 1 est supérieur à celui de la

[5] Taylor et Junker (1978) furent les premiers à mettre en évidence la dynamique du réplicateur.

technologie 2 : $c_1 > c_2 > 0$. Cependant, nous appuyons cet exemple par le résultat obtenu par Gandal (1994) : les consommateurs sont prêts à supporter un coût plus élevé si la technologie offre une externalité de réseau plus importante. De ce point de vue, si les externalités de réseau des technologies 1 et 2 sont notées e_1 et e_2 respectivement, on obtient : $e_1 - c_1 > e_2 - c_2$. Pour simplifier la matrice des paiements, on note : $a = e_1 - c_1, b = -c_1, c = -c_2, d = e_2 - c_2$. Pour les deux utilisateurs i et j, la matrice des paiements est représentée par le Tableau 2.

Tableau 2. Matrice des paiements

	1	2
1	(a,a)	(b,c)
2	(c,b)	(d,d)

A partir du Tableau 2, la classification des fonctions de paiements est telle que $a > cd > b$ et $a > d$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les deux équilibres de Nash (en stratégies pures) sont $(1,1)$ et $(2,2)$. Avec ces deux équilibres, aucun des joueurs n'est incité à modifier son comportement compte tenu du comportement de l'autre utilisateur. Etant donné que $a > d$, l'équilibre $(1,1)$ Pareto domine $(2,2)$.

Par ailleurs, en plus de l'externalité bilatérale, c'est-à-dire les interactions entre deux joueurs, il faut aussi prendre en compte l'effet agrégé de l'externalité de réseau. Comme la concurrence technologique se déroule sur un nombre infini de périodes $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, ...$ avec $\tau \in [0,1]$, les utilisateurs interagissent entre eux à chaque période. Soit $x_i \in [0,1]$ la proportion d'utilisateurs de type i dans la population au temps t avec $x_1 + x_2 = 1$. L'utilité espérée d'un utilisateur de type 1 (respectivement de type 2) lorsque le profil de la population est $x = (x_1, 1 - x_1)$ est : $E[\pi(1,x)] = x_1 a + (1 - x_1)b$. De même, l'utilité espérée d'un utilisateur de type 2 est : $E[\pi(2,x)] = x_1 c + (1 - x_1)d$.

A partir de ces utilités espérées, il existe une proportion x_1^* telle que $E[\pi(1, x_1^*)] = E[\pi(2, x_1^*)]$. Cela donne :

$$x_1 a + (1 - x_1) b = x_1 c + (1 - x_1) d$$
$$x_1^* = \frac{d - b}{a - c + d - b} > 0 \qquad (3)$$

Lorsque le profil de la population est $x_1^* = (x_1^*, 1 - x_1^*)$ aucun utilisateur n'est incité à changer de technologie étant donné le comportement des autres utilisateurs. Donc, x_1^* est un troisième équilibre de Nash et correspond à la situation avec laquelle les deux technologies coexistent à l'équilibre. Les deux autres équilibres de Nash correspondent aux situations de standardisation de l'une des deux technologies.

Pour obtenir la dynamique du réplicateur, on a besoin d'une troisième fonction d'utilité appelée l'utilité moyenne de la population face au profil x. Cette utilité est :

$$E[\pi(x, x)] = x_1 E[\pi(1, x)] + (1 - x_1) E[\pi(2, x)].$$

Deux hypothèses sont posées : (i) les utilités représentent la variation du flux de reproduction d'un réplicateur t par unité de temps τ et (ii) la reproduction est asexuée de sorte qu'un descendant hérite le réplicateur i de son géniteur. Ensuite, à chaque période il existe une fraction τ des descendants d'un individu qui survie. Ainsi, la fraction $(1 - \tau)$ disparaît de la population. Par conséquent, si le profil de la population est x_1^t au temps t, la masse d'individus de type i au temps $(t + \tau)$ est égale à la masse d'individus de type i issue de la génération t plus la masse espérée de descendants engendrés par les individus de type i soit : $x_i^t (1 + \tau E[\pi(i, x^t)])$. Ainsi, la proportion d'individus de type i à l'étape $(t + \tau)$ est la masse d'individus i ayant survécu à $(t + \tau)$ divisée par la masse (espérée) totale de survivants dans la population à $(t + \tau)$, soit :

$$x_i^{t+\tau} = \frac{x_i^t (1 + \tau E[\pi(i, x^t)])}{1 + \tau E[\pi(x^t, x^t)]}$$

En faisant la différence entre la masse d'individus de deux générations successives, on a :

$$x_i^{t+\tau} - x_i^t = \frac{x_i^t(1+\tau E[\pi(i,x^t)])}{1+\tau E[\pi(x^t,x^t)]} - x_i^t$$
$$= \frac{x_i^t \tau(E[\pi(i,x^t)]) - E[\pi(x^t,x^t)])}{1+\tau E[\pi(x^t,x^t)]}$$

En divisant les deux termes de l'égalité par τ et en prenant la limite $\tau \to 0$, on obtient, enfin la dynamique du réplicateur :

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{x_i^{t+\tau} - x_i^t}{\tau} = \frac{dx_i^t}{dt} = \dot{x}_i = x_i^t(E[\pi(i,x^t)] - E[\pi(x^t,x^t)])$$

Comme la réplication ne dépend pas du temps, on peut alors supprimer l'indexation, soit :

$$\dot{x}_i = x_i(E[\pi(i,x)] - E[\pi(x,x)]) \qquad (4)$$

Avec ce calcul, nous obtenons un système d'équations différentielles autonomes :

$f(x) = \dot{x}$ où $\dot{x} = (\dot{x}_{1,}\ \dot{x}_{2,})$ et $f : [0,1]^2 \to R^2$ est donnée par l'équation (4).

Cette équation du réplicateur indique que le taux de variation instantanée de la proportion des individus de type i est proportionnel à la différence entre l'utilité espérée d'un individu de type i $(E[\pi(i,x)])$ et l'utilité moyenne de la population $(E[\pi(x,x)])$. Ainsi le taux de variation instantanée tiré à partir de l'équation (4) donne :

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = (E[\pi(i,x)]) - (E[\pi(x,x)]) \qquad (5)$$

La stratégie i est donc une stratégie évolutionnairement stable si la relation suivante est vérifié : $E[\pi(i,x)]) > E[\pi(x,x)] \Leftrightarrow \frac{\dot{x}_i}{x_i} > 0$. En revanche si $\frac{\dot{x}_i}{x_i} = 0$, la stratégie i n'est plus une stratégie évolutionnairement stable parce qu'elle a tendance à disparaître de la population. Cette formulation de la dynamique du duplicateur sera utilisée pour la suite de notre analyse[6].

[6] A titre d'illustration, Binmore (1992) propose une solution sur le mécanisme de standardisation entre les deux technologies de réseau présentées dans le Tableau 2. I s'agit de choisir un standard parmi les deux technologies

2.3. Jeu évolutionnaire avec deux firmes

Ici, le modèle en question est un jeu évolutionnaire composé de deux matrices des paiements distinctes. En d'autres termes, le jeu évolutionnaire est de dimension linéaire deux. On considère qu'il existe, d'une part, les firmes qui investissent dans la R&D et, d'autre part, les firmes imitatrices. Ces deux catégories de firmes sont considérées comme des joueurs appartenant à la population 1 et à la population 2 respectivement. Chaque population a deux actions alternatives : investir dans la R&D (stratégie pure 1) ou ne pas investir dans la R&D (stratégie pure 2). De plus, si une firme appartenant à la population 2 a la possibilité d'observer l'action d'une firme appartenant à la population 1, sa stratégie pure 1 consistera à imiter la technologie issue de l'investissement de la population 1. Ainsi, la stratégie pure 1 d'une firme appartenant à la population 2 consiste à investir un montant minimum inférieur à celui (la stratégie pure 1) de la firme appartenant à la population 1. De ce point vue, le niveau faible de l'investissement de la firme appartenant à la population 2 permet justement d'imiter une technologie existante. La firme représentative appartenant à la population 1 est le first mover et celle appartenant à la population 2 le follower.

Le jeu est spécifié par les matrices de paiements $A=(a_{hk})$ et $B=(b_{hk})$, où $a_{hk}\in R$ est le paiement de la firme appartenant à la population 1 et $b_{hk}\in R$ est le paiement de la firme appartenant à la population 2. On considère que la firme de la population 1 joue la stratégie pure h et la firme de la population 2 joue la stratégie pure k. De plus, chaque firme fait parti d'une population dont les individus (firmes) adoptent tous la même stratégie : la population 1 et la population 2 sont considérées comme une large population de firmes. Ainsi, chaque population de firme est divisée en fraction $x_1\in[0,1]$ (resp. $y_1\in[0,1]$) de firmes qui choisissent la stratégie pure 1 et la fraction $x_2=1-x_1$ ($x_2\in[0,1]$, (resp. $y_2=1-y_1, y_1\in[0,1]$)

---

concurrentes. Il y a deux situations. Si la technologie i pend un avantage sur la technologie j, on a $E[\pi(i,.)]>E[\pi(j,.)]$ et la causalité circulaire verrouille l'évolution du marché sur le standard i. A l'inverse, si la technologie j prend un avantage sur la technologie i, la causalité circulaire verrouille l'évolution du marché sur le standard j. Dans ces conditions, il existe forcément une standardisation d'une technologie issue du mécanisme de causalité circulaire. Ce mécanisme assure que si $E[\pi(i,x)])>E[\pi(j,x)]$ à l'étape initiale alors $x_i\longrightarrow 1$ lorsque $t\longrightarrow\infty$. Dans cette analyse, Binmore (1992) montre que la coexistence des deux standards est impossible à moins que le système ne s'y trouve à l'étape initiale. Dans le cas contraire, le système est verrouillé sur la trajectoire qui conduit à la standardisation de l'une des technologies. Donc, la coexistence des deux standards est un équilibre instable.

de la population choisissent la stratégie pure 2. Dans cette situation, la position des firmes dont les actions sont formées par le couple (x_1, x_2) (resp. (y_1, y_2)) change en fonction des stratégies pures. En considérant que les couples de stratégies du jeu sont déterminés par paire de firme appartenant à chaque population (une firme par population), on peut mettre en évidence la règle de la dynamique du réplicateur.

Si le paiement d'une firme appartenant à la première population (resp. la seconde) dépend uniquement de la distribution des actions $(y_1, 1-y_1)$ appartenant à l'autre population (resp. $(x_1, 1-x_1)$), la dynamique du réplicateur peut être formulée à l'aide d'un système dérivé de l'état de chaque population considérée. Par exemple la dérivée de l'action d'une firme appartenant à la population 1 est la différence entre la première et la seconde stratégie pure. Cela permet d'obtenir la relation suivante :

$$\dot{x}_1 = \left[(a_{11}-a_{21})y_1 - (a_{22}-a_{12})y_2\right]x_1x_2$$
$$\dot{x}_1 = \left[(a_{11}-a_{21})y_1 - (a_{22}-a_{12})(1-y_1)\right]x_1(1-x_1)$$

En appliquant la même méthode pour la stratégie de la population 2, nous avons :

$$\dot{y}_1 = \left[(b_{11}-b_{12})x_1 - (b_{22}-b_{21})x_2\right]y_1y_2$$
$$\dot{y}_1 = \left[(b_{11}-b_{12})x_1 - (b_{22}-b_{21})(1-x_1)\right]y_1(1-y_1)$$

A partir des équations de $\dot{x}_1$ et $\dot{y}_1$, la dynamique du réplicateur peut facilement être représentée. Cependant, le déplacement vers l'équilibre évolutionnaire dépend de la classification des composants de chaque matrice et de la relation de symétrie ou d'asymétrie entre les firmes.

1er cas : En présence de firmes symétriques

Lorsque la relation qui lie les firmes est symétrique, le déplacement des firmes de la population 1 est déterminé à partir du seuil de la stratégie des firmes appartenant à la seconde population.

De ce point de vue, le cas qui nous intéresse est identique aux jeux itérés avec stratégie dominante. En d'autres termes, c'est le processus d'apprentissage qui permet à chaque joueur de choisir une stratégie en fonction des différentes étapes du jeu. En proposant par exemple deux matrices des gains classifiées de telle sorte que $a_{12} > a_{22} > a_{21} > a_{11}$ pour la matrice A et $b_{21} > b_{11} > b_{22} > b_{12}$ pour la matrice B, la particularité du cas avec les firmes symétriques concerne le seuil de la population 2 à partir duquel les firmes appartenant à la population 1 convergent vers l'une des équilibres évolutionnaire en coin représentés par $(0,1)$ et $(1,0)$. Ce seuil est déterminé à partir de l'équation de la dynamique du réplicateur des firmes appartenant à la population 1, c'est-à-dire $\dot{x}_1 = \left[(a_{11} - a_{21})y_1 - (a_{22} - a_{12})(1 - y_1)\right] x_1(1 - x_1)$. Le calcul de ce seuil donne $y_1 = \dfrac{a_{12} - a_{22}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}$. Ainsi, $\dot{x}_1$ diminue lorque $y_1 > \dfrac{a_{12} - a_{22}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}$ et augmente lorsque $y_1 < \dfrac{a_{12} - a_{22}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}$. De même, il faut noter que $\dot{y}_1$ est toujours croissante quelle que soit la valeur prise par x dans l'intervalle $\left[0,1\right]$. Par conséquent, la distribution des firmes de la population 1 est telle que $b_{12} - b_{22} + \left(b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}\right) x_1 > 0$.

Une illustration graphique (Fig.2) du raisonnement précédent peut permettre de mieux comprendre la trajectoire qui mène vers l'équilibre évolutionnairement stable. Le point essentiel à retenir à ce niveau concerne le déplacement des firmes appartenant à la population 1. En effet, les déplacements sont déterminés en fonction de la valeur prise par y_1.

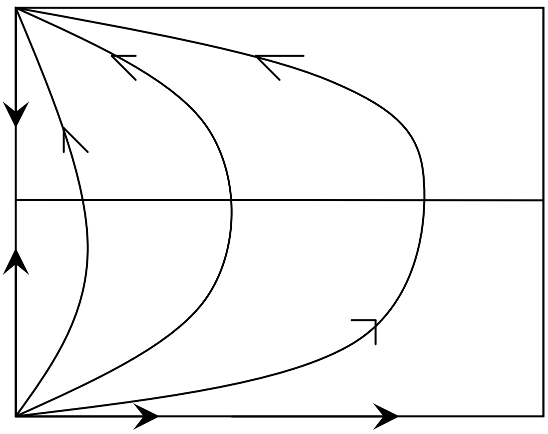

Fig.2. Forme générale de la dynamique du réplicateur

La forme générale de la dynamique du réplicateur montre qu'à partir de la Figure 2, plus le seuil y_1 est proche de 1, plus le déplacement des firmes appartenant à la population 1 est rapide. Cela s'explique par le fait que les firmes de la population 1 ne souhaitent pas investir parce que les firmes de la population 2 imitent de manière simultanée la technologie obtenue. En revanche, lorsque le seuil est proche de zéro, le déplacement des firmes appartenant à la population 1 devient plus lent. Cela s'explique par le fait que les firmes de la population 2 investissent en même temps que les firmes de la population 1.

A partir de la forme générale de la dynamique du réplicateur, une application numérique peut être proposée pour déterminer la valeur exacte du seuil. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -2,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2,0 \\ 4,1 \end{pmatrix}$. L'équation de la dynamique du réplicateur est telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (3-5y_1)x_1(1-x_1) \\ \dot{y}_1 = (3-x_1)y_1(1-y_1) \end{cases}$$

A partir de ce système d'équation, on a, d'une part, $(3-x_1)>0$ pour tout $x_1 \in [0,1]$. Ainsi, $\dot{y}_1$ est toujours croissante. D'autre part, $\dot{x}_1$ diminue lorsque $3-5y_1<0$ (c'est-à-dire lorsque $y_1 > 3/5$), et augmente lorsque $3-5y_1>0$ (c'est-à-dire lorsque $y_1 < 3/5$). Dans ce raisonnement, la première action matérialisée par la première colonne de la matrice B est dominante pour les firmes appartenant à la population 2 et, la seconde action matérialisée par la deuxième ligne de la matrice A est la meilleure réponse de la firme appartenant à la population 1. De ce point de vue, la firme représentative appartenant à la population 1 a une faible incitation à l'investissement lorsque $y_1 > 3/5$. Cela est du au fait que l'action dominante pour la firme appartenant à la population 2 est la stratégie d'imitation. Par conséquent, l'équilibre de Nash unique du jeu est un équilibre en *coin* formé par le couple $(x_1, y_1) = (0,1)$. Cet équilibre de Nash, représenté par la Figure 3, est aussi l'équilibre évolutionnaire du jeu.

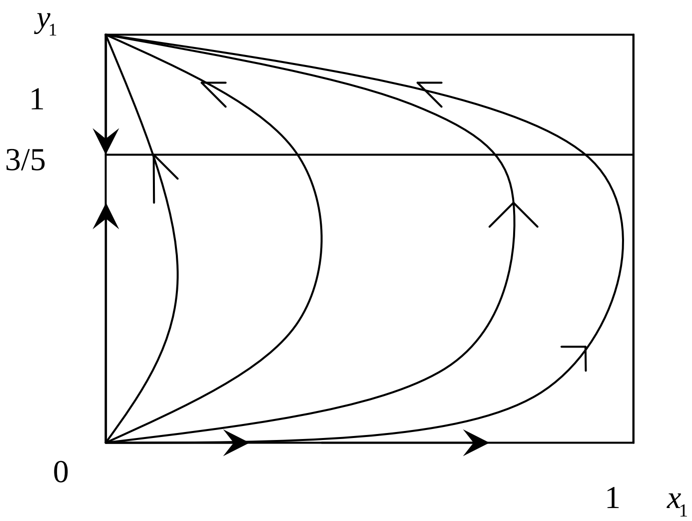

Fig.3. Dynamique du réplicateur entre le FM et le FL

La Figure 3 montre que, d'une part, la proportion de firmes appartenant à la population 2 et qui choisissent la stratégie d'imitation (notée y_1) augmente de manière monotone sur l'axe y_1. D'autre part, la proportion de firmes appartenant à la population 1 et qui choisissent d'investir dans la R&D (notée x_1) augmente lorsque y_1 est en dessous de $3/5$ et, diminue lorsque y_1 est au dessus de $3/5$. Avec cette logique stratégique, le choix d'une firme appartenant à la population 1 dépend de la position de la firme concurrente par rapport à la droite $y = 3/5$. A chaque fois qu'une firme appartenant à la population 1 est incertaine du résultat de son investissement, la stratégie dominante est « ne pas investir ». Cette situation est dominante parce que l'espérance de gain obtenue avec l'investissement de la firme follower est plus faible que le gain certain obtenu avec la stratégie d'imitation. Dans ce cas, il y a une faible incitation à l'investissement et les stratégies de chaque firme suivent le sentier qui se rapproche le plus des axes représentatives des actions (x_1, x_2). En revanche, lorsque la firme appartenant à la population 2 a une faible incitation à l'imitation, c'est-à-dire y_1 proche de zéro, alors la firme appartenant à la population 1 est incitée à l'investissement. Dans cette situation, l'espérance de gain issue de l'investissement en R&D et le gain certain obtenu avec la stratégie d'imitation sont presque identique pour la firme de la population 2.

Comme le montre la théorie des jeux évolutionnaires, ce type d'analyse est applicable à un grand nombre de modèle dès lors qu'il existe deux populations disposant chacune de deux stratégies distinctes[7].

2^eme^ cas : En présence de firmes asymétriques

Dans l'analyse précédente, le jeu est symétrique dans la mesure où les firmes ont les mêmes capacités d'investissement. Que ce passe t-il si on s'affranchît de cette hypothèse ? Quelle sera le nouvel équilibre évolutionnaire lorsque la firme first mover investit quelle que soit la stratégie du follower ? Pour répondre à ces questions, considérons par exemple le cas d'une firme en position de monopole et un entrant potentiel. Soient, la firme 1 (entrant potentiel) et la firme 2 (monopole) avec les matrices des paiements notées B et A respectivement. La firme 2 souhaite que l'entrant potentiel reste en dehors du marché. Lorsque l'entrant potentiel entre sur le marché, les deux firmes ont le choix entre le partage du marché ou faire un combat. En revanche, lorsque l'entrant potentiel reste en dehors du marché, il n'y a pas d'interaction stratégiques et le gain de la firme 2 est de 4.

La particularité de la dynamique du jeu entre deux firmes asymétriques relève du fait que le gain de la firme installée dépend directement de la stratégie de l'entrant potentiel. Ainsi, lorsque l'entrant potentiel décide d'entrer sur le marché la situation est caractérisée par un partage équitable des parts de marché : cette situation permet de décrire une stratégie de menace non crédible. De ce point de vue, la classification des gains ne sera pas identique à la situation où les deux firmes sont symétriques. Par conséquent, la classification des gains de chaque matrice prend en compte la situation dans laquelle les gains des deux firmes sont

[7] Parallèlement à notre approche, il existe un modèle proposé par Krafft et Ravix (2005) dans lequel l'enjeu porte sur l'arbitrage entre les investissements complémentaires et les investissements compétitifs.

identiques. En considérant que la forme normale du jeu est choisie arbitrairement, nous avons $a_{11} > a_{22} > a_{21} \geq a_{12}$ pour la matrice A et $b_{21} \geq b_{22} > b_{11} > b_{12}$ pour la matrice B. Une application numérique peut être proposée de telle sorte que la matrice des gains est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2,0 \\ 4,4 \end{pmatrix}$.

A partir des ces matrices, la dynamique du réplicateur est de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (3y_1 - 1)(1 - x_1)x_1 \\ \dot{y}_1 = 2x_1(1 - y_1)y_1 \end{cases}$$

Avec ce système d'équation, il est possible de constater, dans un premier temps, que $2x_1 > 0 \ \forall x_1 \in [0,1]$. Ainsi $\dot{y}_1$ est toujours croissante. Dans un second temps, $\dot{x}_1$ diminue lorsque $(3y_1 - 1) < 0$, c'est-à-dire $y_1 > 1/3$ et, augmente lorsque $(3y_1 - 1) > 0$, c'est-à-dire $y_1 < 1/3$. Avec ce type de jeu, l'unique paire de stratégie de l'équilibre évolutionnaire est le couple $(x_1, y_1) = (1,1)$. La Figure 4 permet de représenter l'équilibre évolutionnaire du jeu.

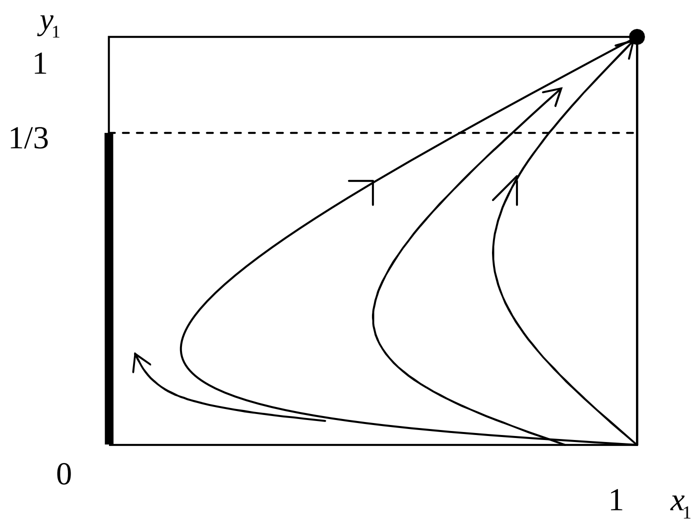

Fig.4. Dynamique du réplicateur avec le jeu d'entrée

Cet exemple montre que l'équilibre évolutionnairement stable est déterminé non seulement en fonction du seuil d'évolution de la population 2, c'est-à-dire des entrants potentiels, mais aussi en fonction de la position des firmes de la population 1 (monopole) à chaque étape du jeu. Etant donné que les firmes de la population 1 investissent donc, celles-ci se situent au point $(0,1)$ puis se déplacent sur l'axe des ordonnées à une vitesse qui dépend de la valeur prise par y_1. La Figure 4 montre que plus y_1 est proche de zéro, c'est-à-dire plus les entrants potentiels ont une faible incitation à entrer sur le marché et investir, plus les firmes installées ont tendance à diminuer leurs efforts consacrés à l'investissement, d'où le déplacement latéral vers le seuil de y_1. En revanche, lorsque y_1 augmente, la population de firme installée continue à investir. Cela signifie que l'on est en présence de jeu itéré avec menace non crédible. Par conséquent, les firmes appartenant à la population 1 continuent à investir quelle que soit la stratégie des firmes de la population 2.

2.4. Discussion des résultats en fonction de la position du seuil d'évolution de la population 1 et de la population 2

La comparaison des résultats montre que la connaissance des stratégies de chaque population de firmes est essentielle pour représenter l'évolution des équilibres du jeu. A ce niveau, nous constatons que lorsqu'il existe une relation symétrique ou asymétrique entre les firmes les déplacements vers l'équilibre évolutionnairement stable ne sont pas identiques. Avec les deux représentations la dynamique vers l'équilibre évolutionnaire est déterminée à partir du seuil y_1 mais la vitesse de déplacement des firmes de la population 2, lorsque les firmes sont symétriques, est plus élevée que celle de la population 2 lorsque les firmes sont asymétriques. Cela permet d'écrire $(3-x_1)>2x_1$ lorsque la proportion de firmes (il s'agit ici des firmes qui investissent) de la population 1 est nulle $(x_1=0)$.

Avec le premier cas dans lequel la position des firmes est symétrique, les firmes appartenant à la population 1 réagissent en fonction du seuil y_1 de la population 2. Dans ce cas, plus le seuil de y_1 est faible, plus la dynamique vers l'équilibre évolutionnaire est lente. Ici, le rapport entre les deux équations différentielles dépend de la stratégie dominante adoptée par chaque population de firme. En d'autres termes, la proportion de déplacement des firmes est déterminée à partir de la droite $y_1=3/5$. Cela permet de caractériser les jeux répétés avec stratégie dominante. Par conséquent, l'équilibre évolutionnaire est représentée par le couple $(x_1,y_1)=(0,1)$. En revanche, avec le second cas dans lequel la position des firmes est asymétrique, le seuil de y_1 a un impact plus faible parce qu'à l'équilibre évolutionnaire la stratégie des firmes appartenant à la population 1 reste la même. Dans ce cas, l'équilibre de Nash et l'équilibre évolutionnaire de stratégies pures sont identiques et formés par le $(x_1, y_1) = (1,1)$. Cela permet de caractériser les jeux itérés avec menace non crédible.

L'analyse comparative montre que les deux équilibres évolutionnaires ne sont pas identiques. Cela signifie que pour $y_1 < 1/3$, la dissuasion à l'entrée de la firme installée est plus faible que le cas où la firme first mover est incitée à investir. De ce point de vue, la stratégie d'une firme incitée à investir et appartenant à la population 1 (jeu d'investissement) est l'opposée de la stratégie d'une firme installée appartenant à la population 1 (jeu de dissuasion à l'entrée). En effet, même si le jeu de la dissuasion à l'entrée est parfois considéré comme un jeu de first mover et de follower, le résultat de l'analyse dépend, au final, de la matrice des paiements de chaque firme. En conséquence, l'obtention d'un équilibre évolutionnaire est prévisible à partir de la classification de la matrice des gains.

Toutefois, le raisonnement portant sur les stratégies issues de cette analyse peut connaître des modifications importantes lorsque la matrice des paiements est modifiée. En effet, le raisonnement ci-dessus dépend du classement de la matrice des paiements de chaque population de firmes. Par conséquent, toute modification du classement de la matrice des gains peut aboutir à une évolution vers un autre équilibre.

3. Conclusion

En théorie des jeux statiques la rationalité des joueurs est forte. Cette hypothèse suppose que les joueurs agissent au mieux de leur intérêt. En information parfaite, les séquences des actions des firmes favorisent la connaissance de la structure du jeu et, par conséquent, les profils d'actions correspondant à l'équilibre de Nash dépendent du résultat l'action du FM et du résultat de l'investissement des deux firmes. Si le FM investit et obtient une innovation, il est optimale pour le FL d'imiter la technologie la technologie obtenue. Ici, les profils de stratégies obtenus à l'équilibre sont (R&D) pour le FM et (E, Imiter) pour le FL. En revanche, si le FM investit mais n'obtient pas d'innovation, il est optimal pour le FL d'investir. Dans ce cas, les profils de stratégies de l'équilibre de Nash sont (R&D) pour le FM et (E, Investir) pour le FL. A l'inverse, lorsque le FM décide de ne pas investir, le profils de stratégies du FL est identique à la situation avec laquelle le FM investit mais n'obtient pas d'innovation. De manière plus précise, les profils de stratégies correspondant à l'équilibre de Nash sont (¬R&D) pour le FM et (E, R&D) pour le FL.

Par ailleurs, en introduisant la forme prise par les fonctions de réaction dans notre modèle, il existe un parallélisme entre les profils de stratégies obtenus en théorie des jeux et la position de la firme issue de la réaction de la firme adverse. Ce parallélisme permet de relier les deux approches en fonction des profils de stratégies obtenus. Il existe trois situations. Dans la première, les profils de stratégies (R&D) pour le FM et (E, Imiter) pour le FL possèdent les mêmes caractéristiques que le cas dans lequel les fonctions de réaction des firmes sont décroissantes. Cependant, il existe une controverse à ce niveau parce que dans l'approche de la théorie des jeux le FL obtient un profit plus important que celui du FM, alors que dans l'approche des fonctions de réaction le profit du FM est plus important que celui du FL. En effet, lorsque les mouvements des firmes sont séquentiels, les gains de la firme FM sont plus faibles (élevés) que ceux du FL à condition que les fonctions de réaction des firmes soient croissantes (décroissantes). Dans la seconde situation, les profils de stratégies (R&D) pour le FM et (E, R&D) pour le FL possèdent les mêmes caractéristiques que la situation dans laquelle les fonctions de réaction des firmes sont croissantes. Dans ce cas, la controverse entre les deux approches est levée parce que le FL est en position plus avantageuse du fait que, d'une part, son espérance de gain est importante et, d'autre part, l'investissement du FM aboutit à un échec. De ce fait, en prenant en compte la méthode de la *valeur effective minimax*, notre modèle devient identique à la situation dans laquelle les fonctions de réaction des firmes sont croissantes. Par conséquent, le FL obtient, par imitation, un gain plus important que celui du FM. Dans la troisième situation, les profils de stratégies sont (¬R&D) pour le FM et (E, R&D) pour le FL. Dans cette situation aucune relation ne peut être établie entre les deux approches parce que les stratégies d'investissement des deux firmes ne sont pas identiques.

La comparaison entre les jeux à un seul coup et les jeux itérés permet aussi de comprendre la dynamique des stratégies en situation de conflit. Cette analyse comparative montre que les stratégies changent selon l'horizon pris en compte. En adaptant le modèle de Wen (2002) à notre analyse, il est possible de constater qu'en situation de jeu séquentiel fini, la firme qui choisit la première position a un rendement moins élevé que la firme qui se déplace en seconde position. De ce point de vue, même si les firmes disposent de capacité d'investissement identique, la théorie selon laquelle il y a en général un avantage de la firme installée par rapport à l'entrant potentiel, est remise en cause. Ceci laisse entendre un processus d'effet de remplacement, sauf que dans notre modèle, au lieu d'innover, la firme follower imite la technologie du first mover à l'équilibre. En conséquence, ce résultat permet de conclure qu'avec la méthode de la *valeur effective minimax*, il existe un avantage de la firme follower sur la firme first mover en situation d'horizon temporel fini. Cependant, le passage d'un horizon temporel fini à un horizon temporel infini ne permet pas de définir un ordre de préférence quant au déplacement séquentiel des joueurs. Cette méthode comporte donc des limites.

Toutefois, l'analyse de la théorie des jeux statiques comporte des limites faisant apparaître quatre types de difficultés : l'hypothèse de forte rationalité des joueurs, la stabilité des équilibres, l'analyse microscopique des stratégies des agents et la résolution des équilibres multiples.

Pour lever les difficultés de la théorie des jeux statiques, les jeux dynamiques ont été introduites. Ici, l'objectif était de déterminer la stratégie évolutionniarement stable. De ce point de vue, la théorie des jeux évolutionnaires prend en compte quelques notions de base qui favorisent son identification. Par rapport à ce point, les principales caractéristiques permettant d'identifier les modèles évolutionnistes sont résumées dans les faits stylisés suivants :

- Il existe une « homogénéité » des stratégies des individus appartenant à une même population. En effet, lorsque les stratégies de chaque individu sont prises en compte, la stabilité de l'équilibre évolutionnaire est déterminée en fonction de la stratégie commune adoptée par tout ou partie des individus de cette population (Maynard Smith et Price ,1973 ; Maynard Smith, 1982). Ainsi, raisonner sous l'hypothèse d'un agent représentatif semble pertinent dans la mesure où la population considérée dispose uniquement de deux stratégies possibles. La simplification du raisonnement et des stratégies illustre bien l'existence d'interactions stratégiques.
- La mise en évidence des éléments stratégiques est analysée en fonction de la prise en compte d'un individu appartenant à chaque population : les combats se font par paire

d'individus. Ce point est une spécificité pour la plupart des modèles dès lors que l'hypothèse d'un agent représentatif reste toujours valable.

- Il existe une rationalité limitée sur la base de laquelle chaque individu ou joueur optimise sa fonction de paiement. Sur ce point, il a été considéré que la rationalité très forte est relâchée au profit de la rationalité. Avec l'absence d'outils concrets permettant d'intégrer le niveau de rationalité dans les modèles de théorie des jeux, la fonction de paiement occupe, néanmoins, une place considérable dans la détermination de l'équilibre évolutionnaire (Weibull, 1995).
- Par analogie, la dynamique de l'évolution (biologique) est une dynamique déterministe d'un processus de sélection naturelle que l'on appelle la dynamique du réplicateur. Cette notion que l'on retrouve dans la plupart des modèles darwiniens est applicable dans des domaines aussi complexes que variés. Le point essentiel à retenir à ce niveau concerne d'abord la détermination des équilibres de Nash en stratégies pures. Ensuite, il faut calculer l'utilité moyenne de la population face à chaque profil d'action. Enfin, il faut procéder à la comparaison des grandeurs représentatives de la proportion d'individus entre deux étapes successives. Ainsi, la dynamique du réplicateur est illustrée par un système d'équations différentielles autonomes (Schuster et Sigmund, 1983). De la même manière, la sélection est explicitement modélisable à travers la dynamique du réplicateur en comparant l'évolution des parts de marché de chaque firme à la moyenne de l'industrie (Silverberg et *alii*., 1998)

Dans la présentation du modèle, qualifié de jeu évolutionnaire à dimension linéaire deux, les firmes sont issues de deux populations distinctes disposant chacune de deux choix alternatifs possibles. En considérant que les couples de stratégies du jeu se font par paire de firme appartenant à chaque population (une firme par population), le modèle est alors orchestré comme la dynamique de l'évolution, c'est-à-dire, par l'utilisation de la dynamique du réplicateur. La dynamique du réplicateur montre qu'à partir des données représentatives de la matrice des paiements, la SES entre le first mover et le follower évolue en fonction de la valeur prise par le système d'équation différentielle symbolisant le degré d'incitation de la firme follower entre le choix de ses deux actions alternatives (investir ou imiter). Aussi, ces deux actions concernent uniquement les firmes appartenant à la population 2. Par conséquent, la stratégie d'investissement de la firme first mover dépend du degré d'incitation de la stratégie d'imitation de la firme follower. Ainsi, l'équilibre évolutionnaire évolue en fonction de la relation de symétrie ou d'asymétrie entre les firmes

Bibliographie

ABREU D., DUTTA P-K. et SMITH L., [1994], "The folk theorem for repeated games: a NEU condition", *Econometrica*, Vol. 69, p. 1-32.

ALBAEK S., [1990], "Stackelberg leadership as a natural solution under cost uncertainty", *The Journal of Industrial Economics*, Vol. 38, p. 335-347.

ANDERSON S-P. et ENGERS M., [1994], "Strategic investment and timing of entry", *International Economic Review*, Vol. 35, p. 833-853.

AUMANN R.-J., [1981], "Survey of repeated games", *Essays in Game Theory Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, p. 11-42.

BEAL S., [2005], "Rationalité limitée et jeux de machines", *Revue Economique* Vol. 56, pp. 1033-1063

BEATH, KATSOULAKOS et ULPH, [1989], "Sequential product innovation and industry evolution", *The Economic Journal*, Vol. 94, p. 32-43.

BERTRAND J., [1883], "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, Vol. 68, p. 499-508.

BINMORE K., [1992], *Fun and Games*, Heath and Company, Lexington, trad. franç. *Jeux et Théorie des Jeux*, De Boeck, 1999.

BOYER M. et MOREAUX M., [1986], "Being a leader or a follower: reflections on the distribution of roles in duopoly", *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 5, p. 175-192.

BOYER M. et MOREAUX M., [1987], "On Stackelberg equilibrium with differentiated products: the critical role of the strategy space", *The Journal of Industrial Economics*, Vol. 36, p. 217-230.

BOYER M., et MOREAUX M., [1988], "Rational rationing in Stackelberg equilibrium", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 103, p. 409-414.

COLMAN A-M., [1982], *Game theory and experimental games*, Pergamon Press, Oxford.

COURNOT J.A, [1838], *Recherche sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*, Hachette, Paris.

DAMME V-E., [1995], "Game theory, the next stage", *Discussion Paper N° 73*.

DASTIDAR K-G., [2004], "On Stackelberg games in a homogeneous product market", *European Economics Review*, Vol.48, p. 549-562.

DOSI G. et WINTER S-G., [2003], "Interprétation évolutionniste du changement économique: une étude comparative", Revue Economique, Vol. 54, pp. 385-406.

DOWRICK S., [1986], "Von Stackelberg and Cournot duopoly: choosing roles", *Rand Journal of Economics*, Vol. 17, p.251-260.

DUTTA P., [1995], "A folk theorem for stochastic games", *Journal of Economic Theory*, Vol. 66, p. 1-32.

FERNANDO V-R., [1995], *Evolution, Games, and Economic Behavior*, Oxford University Press.

FORAY D., [2002], « Innovation et concurrence dans les industries de réseau », *Revue française de gestion*, n°139, pp. 131-154.

FRIEDMAN J-W., [1983], *Oligopoly theory*, Cambridge University Press.

FRIEDMAN J-W., [1991], *Game theory with application to economics*, Oxford University Press.

FRIEDMAN D., [1996], "Equilibrium in evolutionary games: some experimental results", *The Economic Journal*, Vol. 106, pp. 1-25.

FRIEDMAN J-W. et ROSENTHAL R-W., [1986], "A positive approach to non-cooperative games", *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 7, pp. 235-251.

FUDENBERG D. et Tirole J., [1991], *Game theory*, Cambridge MIT Press.

GALE D., [2001], "Monotonic games with spillovers", *Games and Economic Behavior*, Vol. 37. p.295-320.

Gal-Or E., [1985], "First mover and second mover advantages", *International Economic Review*, Vol.26, p. 649-653.

GANDAL N., [1994], "Hedonic prices indexes for spreadsheets and an empirical test for network externalities", *Rand Journal of Economics*, Vol. 25, pp. 160-170.

GLAZER A., [1985], "The advantage of being the first", *The American Economic Review*, Vol. 75, p. 473-480.

GUERRIEN B., [2002], *La théorie des jeux* , Economica, 3 edition.

HAAN M. et MARS H., [1996], "Stackelberg and Cournot competition under equilibrium limit pricing", *Journal of Economic Studies*, Vol. 23, p. 110-127.

HALLER H. et LAGUNOFF R., [2000], "Genericity and markovian behaviour in stochastic games", *Econometrica*, Vol. 68, p.1231-1248.

HOPPE H-C, [2000], "Second mover advantages in the strategic adoption of new technology under uncertainty, *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 18, p. 315-338.

KRAFFT J. et RAVIX J-L., [2005], “The governance of innovative firms: an evolutionary perspective”, *Economics of Innovation and New Technology,* Vol. 14, pp. 125-147.

LAMBERTINI L., [2005], “Stackelberg leadership in a duopoly with stochastic capital accumulation”, *Journal of Evolutionary Economics*, Vol. 15, p. 443-465.

MAYNARD SMITH J., [1982], *Evolution and the theory of games*, Cambridge, Cambridge University Press.

MAYNARD SMITH J. et PRICE G., [1973], “The logic of animal conflicts”, *Nature*, Vol. 246, pp. 15-18.

McNAMARA J-M., MERAD S. et COLLINS E-J., [1991], “The Hawk-Dove game as an average-cost problem”, *Advances in Applied Probability,* Vol. 23, pp. 667-682.

ONO Y., [1978], “The equilibrium in duopoly in a market of homogeneous goods”, *Econometrica*, Vol. 45, p. 287-295.

ONO Y., [1982], “Price leadership: a theoretical analysis”, *Econometrica,* Vol. 49, p. 11-30.

SCHUSTER P. et SIGMUND K. [1983], “Replicator dynamics”, *Journal of Theoretical Biology,* Vol. 100, pp. 533-538.

SHERALI H-D., [1984], “A Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis”, *Operations Research*, Vol. 32, p. 390-404.

SILVERBERG G., DOSI G. et ORSENIGO L., [1988], “Innovation, diversity and diffusion: a self-organisation model, *Economic Journal*, Vol. 98, pp. 1032-1054. STONIER J. et TRIANTIS A., [1999], “Natural and contractual options: the case of aircraft delivery options”. *In conference Proceedings of 3rd annual international conference on real options.*

VAN DAMME E., [1987], *Stability and perfection of Nash equilibria*, Berlin: Springer Verlag.

WEIBULL J., [1995], *Evolutionary game theory*. Cambridge, MA:MIT Press.

WEN Q., [2002], “A folk theorem for repeated sequential games”, *Review of economic Studies*, Vol. 69. p. 493-512.